## 基础课40 空间向量及其运算和空间位置关系

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 空间向量及其运算 | 掌握 | 2023年全国乙卷（文）  2021年新高考Ⅰ卷 | ★★☆ | 直观想象逻辑推理数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，空间向量的线性运算在立体几何大题的地位在慢慢提升，对考生的要求也在逐渐提高，在2025届的高考备考中，需要着重训练不建系的方法去求解立体几何大题 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、空间向量的有关概念

|  |  |
| --- | --- |
| 名称 | 定义 |
| 空间向量 | 在空间中，具有大小和方向的量 |
| 相等向量 | 方向相同且模相等的向量 |
| 相反向量 | 方向相反但模相等的向量 |
| 共线向量（或平行向量） | 表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合的向量 |
| 共面向量 | 平行于同一个平面的向量 |

##### 二、空间向量的有关定理

1.共线向量基本定理(一维向量基本定理):空间两个向量，共线的充要条件是存在唯一的实数λ,使得①.

2.共面向量定理:如果两个向量，不共线,那么向量与向量，共面的充要条件是存在唯一的有序实数对(x,y),使=②.

3.空间向量基本定理:如果向量，，是空间三个不共面向量,是空间任意一个向量,那么存在唯一的三元有序实数组(x,y,z),使得=③.这时{，，}叫作空间的一组基,其中，，都叫作基向量.

4.投影向量与投影数量

由于任意两个空间向量一定是共面向量,故可以把投影向量及投影数量的概念直接推广到空间向量中.

(1)若用0表示与向量(≠**0**)同方向的单位向量,则向量在向量方向上的投影向量为,0,称,为向量在向量方向上的投影数量.

(2)结合空间向量数量积的定义可知,向量在向量方向上的投影数量为||cos<,>==0·.

##### 三、空间向量的数量积

1.两个向量的夹角：已知两个非零向量，，在空间任取一点，作，，则叫作向量与的夹角，记作,，其范围是④.若,，则称与互相垂直，记作；若,或, ,则称与互相平行或共线，记作.

2.两个向量的数量积：已知两个非零向量，，则,叫作与的数量积，记作，即,.

3.空间向量数量积的运算律

（1）结合律：.

（2）交换律：.

（3）分配律：.

##### 四、空间向量的坐标表示及其应用

设，.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 向量表示 | 坐标表示 |
| 数量积 | , |  |
| 共线 |  | ⑦，， |
| 垂直 |  |  |
| 模 |  |  |
| 夹角 | , |  |

##### 五、直线的方向向量和平面的法向量

1.直线的方向向量：如果表示非零向量的有向线段所在直线与直线平行或重合，则称此向量为直线的方向向量.

2.平面的法向量：直线 平面 ，取直线的方向向量，则向量叫作平面 的法向量.

##### 六、空间位置关系的向量表示

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 位置关系 | | 向量表示 |
| 直线，的方向向量分别为， |  |  |
|  |  |
| 直线的方向向量为，平面的法向量为 |  |  |
|  |  |
| 平面，的法向量分别为， |  |  |
|  |  |

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 空间中任意两个非零向量，共面.( √ )

（2） 在向量的数量积运算中,.( × )

（3） 对于非零向量，若，则.( × )

（4） 若{，，}是空间的一个基底，则，，中至多有一个零向量.( × )

2. （易错题）在下列命题中：

①若向量,共线，则向量,所在的直线平行；

②若向量,所在的直线为异面直线，则向量,一定不共面；

③若三个向量,,两两共面，则向量,,共面；

④已知空间中三个向量,,，则对于空间的任意一个向量，总存在实数,,，使得.

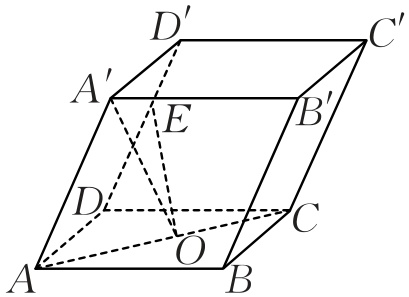
其中所有假命题的序号是①②③④.

**【易错点】**混淆两个向量间的位置关系与两条直线的位置关系而致误.

[解析]若,共线，,所在直线也可能重合，故①为假命题； 据空间向量的意义知，,所在直线异面，但,必共面，故②为假命题； 三个向量,,中任两个一定共面，但它们三个却不一定共面，故③为假命题； 只有当,,不共面时，空间任意一向量才能表示为，故④为假命题.

##### 题组2 走进教材

3. （双空题）（人教A版选修①P7·例2改编）如图，在平行六面体中，，,, , ，则10，的长为.



[解析].

因为，

所以，

所以，即的长为.

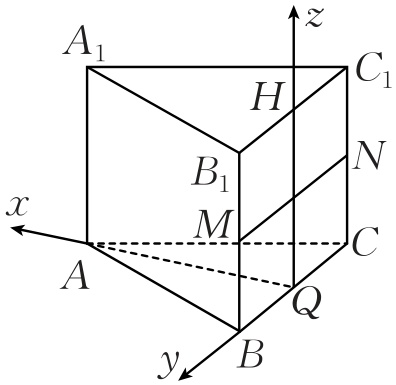
4. （人教A版选修改编）已知,，且，则.

[解析]因为，所以，解得.

##### 题组3 走向高考

5. [2021·新高考Ⅰ卷改编]在正三棱柱中，，点满足，其中，则使得的点有2个.

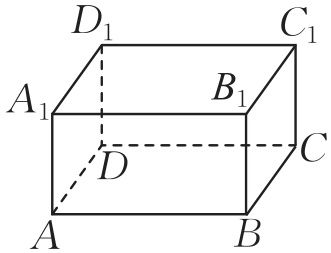
[解析]如图，因为，,取，的中点分别为，，则，所以点轨迹为线段，以为坐标原点，建立空间直角坐标系如图，则，，，所以或.故点,均满足.故满足的点有2个.



### 考点聚焦·突破

#### 考点一 空间向量的线性运算［自主练透］

1. 如图所示，在长方体中，下列各式运算结果为向量的是( B ).



；

；

；

.

A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ①④

[解析]，错误；

，正确；

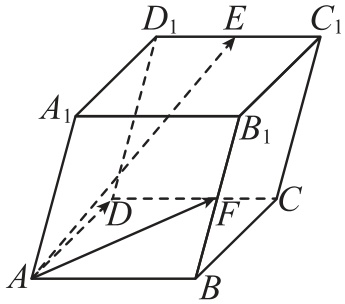
，正确；

，错误.故选.

2. [2024·浙江模拟]在平行六面体中，为的中点，为的中点，,,，则( C ).

A. B. C. D.

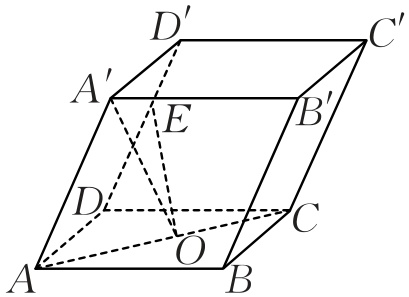
[解析]如图，设,，则,，



所以，所以，所以.

故选.

3. 如图所示，在平行六面体中，为的中点.设,,.



（1）用,,表示；

（2）设是棱上的点，且，用,,表示.

[解析]（1）因为为的中点，,,，

所以，

所以.

（2）因为，

所以.



**空间向量的线性运算的三个关键点**

1.结合图形，明确图形中各线段的几何关系；

2.正确运用向量加法、减法与数乘运算的几何意义；

3.平面向量的三角形法则、平行四边形法则在空间中仍然成立.

#### 考点二 空间向量的基本定理及应用［师生共研］

典例1 已知，，三点不共线，为空间内任意一点，且空间内不与点，，重合的一点满足．

（1）判断，，三个向量是否共面；

（2）判断点是否在平面内．

[解析]（1）因为，所以，

所以，

即,故向量，，共面.

（2）由（1）知向量，，共面，三个向量又有公共点，故，，，四点共面，即点在平面内.



**证明空间四点,,,共面的方法**

1.；

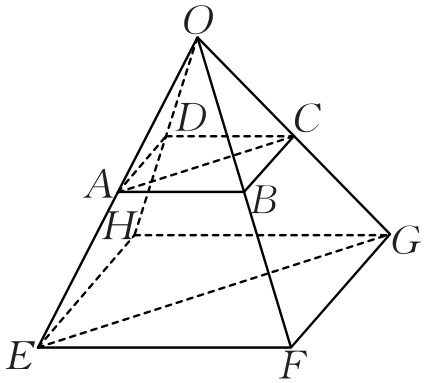
2.对空间任意一点，；

3.对空间任意一点，；

4.（或或）.

##### 针对训练

已知,,,,,,,,为空间的9个点（如图所示），并且，，，，.求证：



（1） ,,,四点共面，,,,四点共面；

[解析]因为，所以，，为共面向量，

因为，，有公共点，所以，，，四点共面，

因为，所以，，为共面向量，

因为，，有公共点，所以，，，四点共面.

（2） .

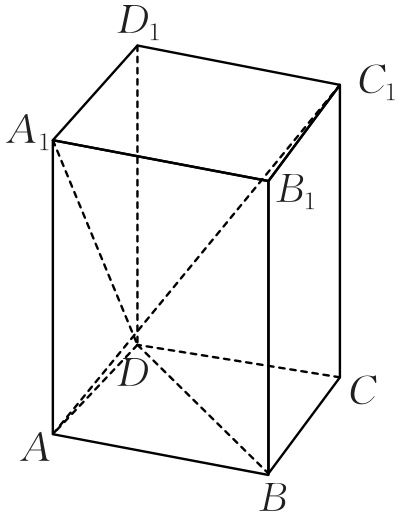
[解析]因为，，，

，

所以，因为，无公共点，所以.

#### 考点三 空间向量的数量积及应用［师生共研］

典例2 如图，在平行六面体中，底面是边长为1的正方形，， .



（1）求线段的长；

（2）求异面直线与所成角的余弦值；

（3）求证：.

[解析]（1）设，，，

则，，，.

因为，

所以，

所以线段的长为.

（2）设异面直线与所成的角为 ，

因为，，

所以，

，

则，

即异面直线与所成的角的余弦值为.

（3）因为，，所以，所以，即.

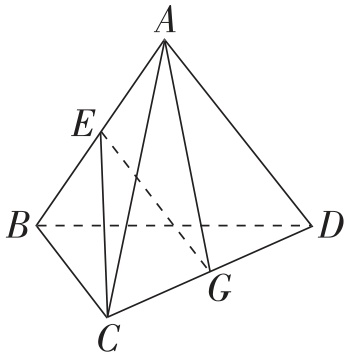


**空间向量数量积的应用**

|  |  |
| --- | --- |
| 求夹角 | 设向量,的夹角为，则，进而可求两异面直线所成的角 |
| 求长度（距离） | 利用公式，可将线段长度的计算问题转化为向量数量积的计算问题 |
| 解决垂直问题 | 利用,，可将垂直问题转化为向量数量积的计算问题 |

##### 针对训练

如图所示，已知空间四边形的每条边和对角线长都等于1，，分别是，的中点，计算：



（1）的长；

（2）异面直线与所成角的余弦值．

[解析]设，，,

则，.

（1）因为，所以，则.

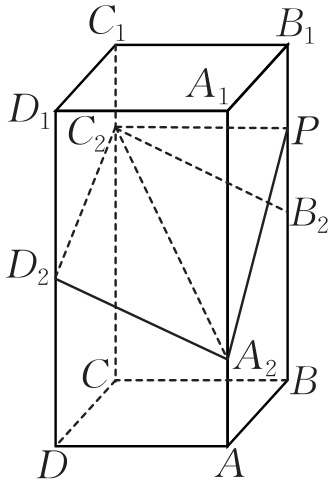
（2）因为，，所以，,,

所以，

因为异面直线所成角的取值范围是，所以异面直线与所成角的余弦值为.

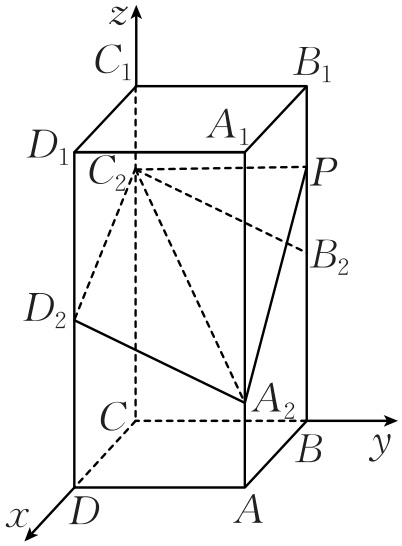
#### 考点四 利用空间向量证明空间位置关系［师生共研］

典例3 [2023·新高考Ⅰ卷节选]（一题多解）如图，在正四棱柱中，,.点,,,分别在棱,,,上，,,.



求证：.

[解析]（法一：建系法）以为坐标原点，,,所在直线分别为轴,轴,轴建立空间直角坐标系，如图，



则,,,,，

,，

，

又，不在同一条直线上，.

（法二：基底法）由，

而,,，

所以,

即，所以.

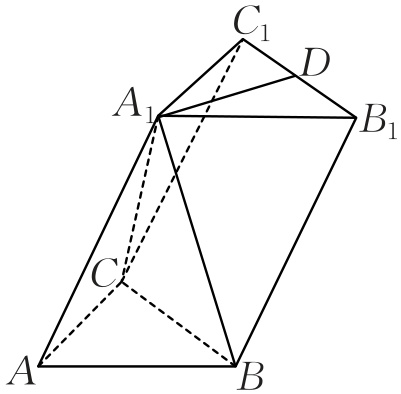


**利用空间向量法证明空间位置关系的两种方法**

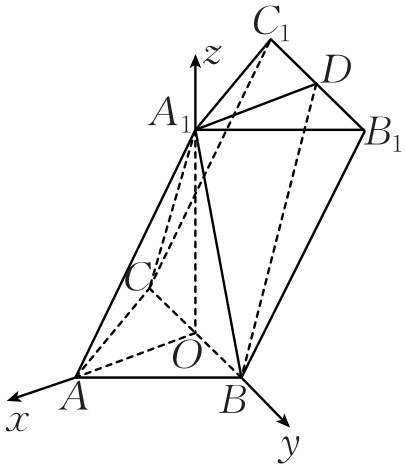
|  |  |
| --- | --- |
| 建系法 | 利用建系法证明平行、垂直关系，关键是建立恰当的坐标系，其核心是利用向量的数量积和线性运算的坐标运算 |
| 基底法 | 利用基底法证明平行、垂直关系，关键是选择恰当的基底（不建系），其核心是利用空间向量的线性运算及基本定理，结合向量的数量积和线性运算转化证明 |

##### 针对训练

（一题多解）如图，在三棱柱中， ，，，在底面的射影为的中点，是的中点.求证： 平面.



[解析]（法一：建系法）如图，取的中点为，以为坐标原点，，，所在直线分别为，，轴建立空间直角坐标系，则,，



则,,,，

，,，

则所以,，又, 平面, 平面,所以 平面.

（法二：基底法）设在底面上的射影为点，则为的中点，

因为,所以,

因为,所以,

又,所以 平面.